

Казанский государственный университет

**Сборник задач
по газовой динамике**

Учебное пособие

Часть 2. Двумерные течения

Казань 2006

**Печатается по решению кафедры аэрогидромеханики
Казанского государственного университета
(протокол № 1 от 29.08.06.)**

**Составители: доцент каф. аэрогидромеханики Казанского
университета Е.И.Филатов, ст. Г.Н.Чукурумова.**

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. В.В.Клоков

**Сборник задач по газовой динамике. Часть 2. Двумерные течения:
учебное пособие. Сост. Е.И.Филатов, Г.Н. Чукурумова.**

Казань: Казанский государственный университет. 2006. – 48 с.

**Учебное пособие предназначено для использования студентами спе-
циальности «механика» при изучении курса «Газовая динамика»**

**©Казанский государственный
университет. 2006 г.**

ДВУМЕРНЫЕ ИЗЭНТРОПИЧЕСКИЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

При обтекании равномерным сверхзвуковым потоком газа тупого внешнего угла (рис.1) происходит расширение газа, понижение в нем давления, температуры, плотности увеличение скорости. Область, в которой газ расширяется, заключенная между линиями Маха OA , соответствующей числу M_1 и OB , соответствующей числу M_2 , называется *простой центрированной волной расширения*. Параметры газа в волне расширения постоянны вдоль каждого луча OC .

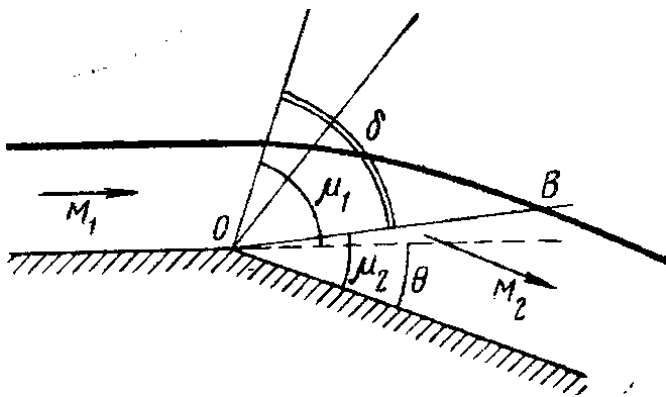


рис.1

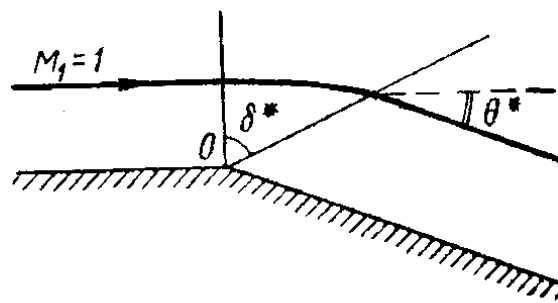


рис.2

В отличие от волн сжатия конечной интенсивности – скачков уплотнения, волны расширения являются областями непрерывного изэнтропического изменения параметров газа. Волны расширения имеют место и при истечении газа из сопла в среду, где давление ниже, чем в струе на срезе сопла.

Расчет простых волн расширения входит как элемент в решение многих задач на построение линий тока и отыскание распределения давления по обтекаемым поверхностям.

Если поток газа до расширения имеет звуковую скорость $V = a$, то угол поворота потока в волне θ^* (см. рис.2) связан с числом Маха потока (после поворота) соотношением:

$$\theta^* = \lambda_m \arctg \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\lambda_m} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}, \quad \text{где } \lambda_m = \frac{V_m}{a_{kp}} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}. \quad (1)$$

Угол δ^* , который при этом определяет область, занятую волной расширения, можно найти из формулы:

$$\delta^* = \lambda_m \arctg \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\lambda_m}. \quad (2)$$

Если поток газа до расширения имеет скорость сверхзвуковую ($M_1 > 1$), то при решении задач удобно считать, что эта скорость приобретена газом во время некоторого фиктивного поворота на угол θ_1^* , до которого скорость газа была звуковой. Угол θ_1^* вычисляется по формуле (1) при $M = M_1$.

Угол θ , на который повернется поток, с увеличением числа Маха от $M = M_1$ до $M = M_2$ может быть найден как разность фиктивных углов поворота, соответствующих числам M_1 и M_2 : $\theta = \theta^*(M_2) - \theta^*(M_1)$.

Таким образом, каждому числу M соответствует угол θ^* , характеризующий «израсходованную часть способности газа к расширению».

Аналогично, угол δ , занятый волной расширения, можно найти как разность $\delta = \delta_2^* - \delta_1^*$, где δ_1^* и δ_2^* вычисляются по формуле (2) при $M = M_1$ и M_2 - соответственно. Значения $\theta^*(M)$ и $\delta^*(M)$ для воздуха при $k = 1,4$ даны в табл. 4

Полагая в формуле (1) $M = \infty$, получим угол $\varphi_{\max} \rightarrow M_H = 1$, на который способен повернуться в волне расширения поток газа, имеющий до поворота начальное число Маха $M_H = 1$:

$$(\theta_{\max})_{M_H=1} = (\lambda_m - 1) \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

Для воздуха: $(\theta_{\max})_{M_H=1} = 130,4^\circ$. Максимальный угол поворота в волне расширения потока с начальным числом $M_H = M_1 \neq 1$ получим по формуле:

$$(\theta_{\max})_{M_H=M_1} = (\theta_{\max})_{M_H=1} - \theta^*(M_1).$$

Между углами θ^* , δ^* и μ имеется соотношение: $\theta^* = \delta^* + \mu - 90^\circ$.

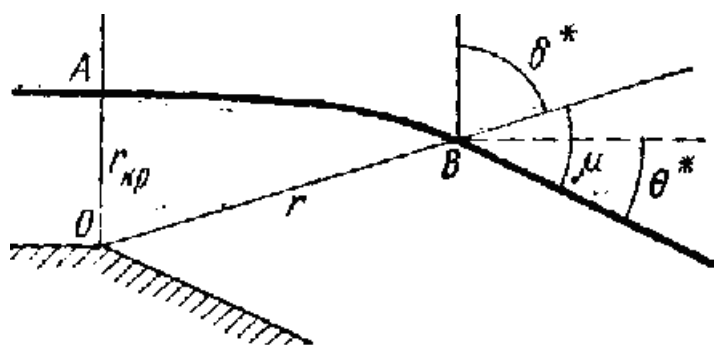


Рис.3

Для отыскания линии тока в области волны расширения можно использовать формулу (см. табл. 4):

$$\frac{r}{r_{кр}} = \left[\cos \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \delta^* \right]^{\frac{k+1}{k-1}}, \quad (4)$$

где $r_{кр} = AO$, $r = BO$ (см. рис. 3).

Соотношение между давлениями на двух каких-либо лучах в волне расширения получим, зная числа M на этих лучах:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{\pi(M_2)}{\pi(M_1)}.$$

Заменяя криволинейную стенку многоугольником, можно приближенно рассчитать ее обтекание по приведенным выше формулам. Если же известно уравнение кривой, образующей стенку, то задача может быть решена точно, так как скорость и давление в любой точке поверхности будет определяться углом касательной к поверхности в данной точке по отношению к направлению скорости потока в начале волны расширения.

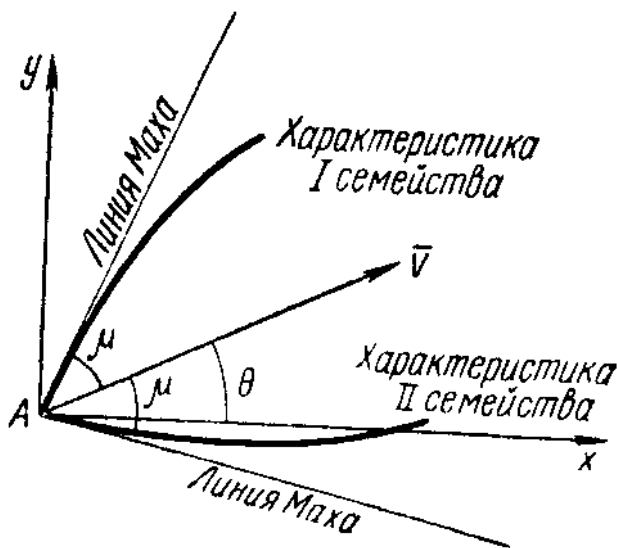


Рис.4

Общим методом численного решения задач газовой динамики, в тех случаях, когда в рассматриваемой области поток газа сверхзвуковой, является *метод характеристик*.

Характеристикой в плоскости течения $\langle x, y \rangle$, называется кривая, касательная в каждой точке которой совпадает по направлению с одной из линий Маха (составляет угол Маха с вектором скорости для данной точки). Через каждую точку плоскости течения проходят две характеристики, принадлежа-

щие к разным семействам (рис.4). Назовем их характеристиками $\langle \xi, y \rangle$. В общем случае форма характеристик $\langle \xi, y \rangle$ определяется видом течения.

В плоскости $\langle \psi, v \rangle$ можно определить кривые, называемые *характеристиками в плоскости годографа*, отражающие изменение скорости при перемещении вдоль характеристик $\langle \xi, y \rangle$. Назовем их характеристиками $\langle \psi, v \rangle$. Форма характеристик в плоскости годографа одна и та же для всех плоских изэнтропических течений.

Аналитически безразмерный годограф скорости в изэнтропическом течении может быть представлен формулой

$$\theta = \pm \left(\lambda_m \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda_m^2 - \lambda^2}} - \operatorname{arctg} \lambda_m \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda_m^2 - \lambda^2}} \right) + C_{1,2}, \quad (5)$$

где значение постоянной $C_{1,2}$ выделяет определенную характеристику $\langle \psi, v \rangle$ из двух семейств, различаемых по знаку перед скобкой в формуле (5). Геометрически формула (5) изображается двумя семействами эпициклоид, заключенных в кольцо $1 \leq \lambda \leq \lambda_m$.

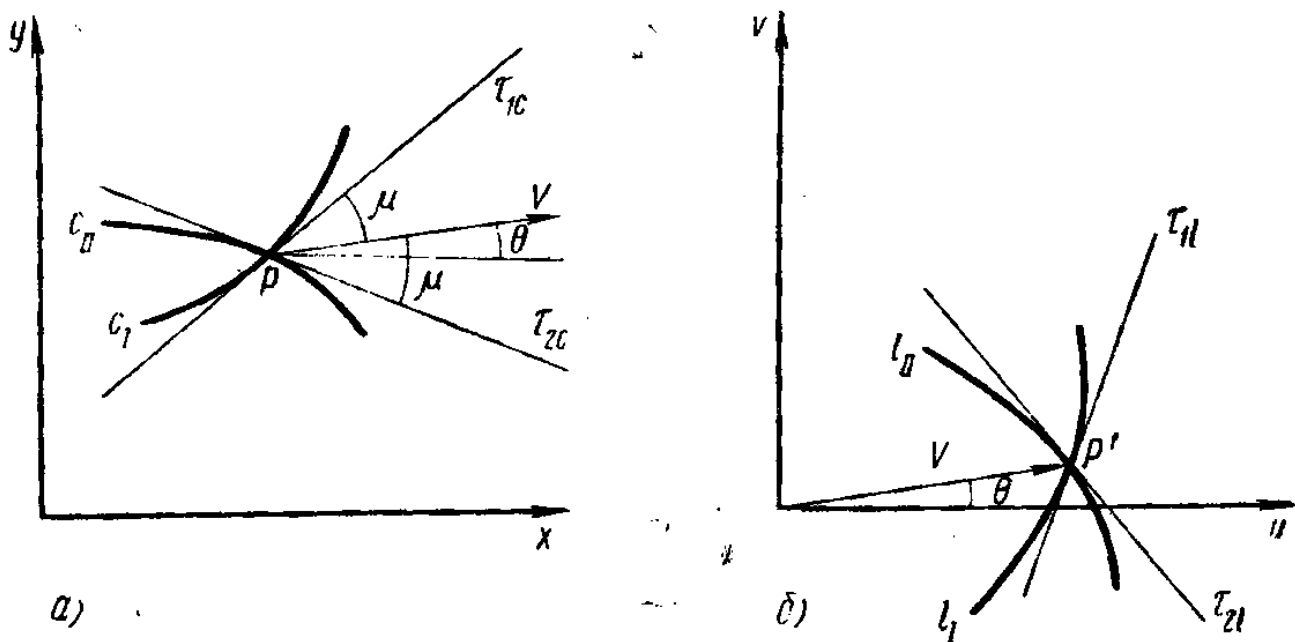


Рис.5

Сетки характеристик $\langle \xi, y \rangle$ и $\langle \psi, v \rangle$ взаимны в том смысле, что в любых соответственных точках обеих плоскостей касательная τ_{1c} к характеристике $\langle \xi, y \rangle$ первого семейства перпендикулярна касательной τ_{2l} к характеристике $\langle \psi, v \rangle$ второго семейства и наоборот (рис.5).

Если в формуле (5) ввести новые постоянные $2\bar{n}_1 = -C_1$, $2\bar{n}_2 = C_2$, то уравнения эпициклоид запишутся в виде

$$\theta = -\zeta(\lambda) + 2\bar{n}_1; \quad \theta = \zeta(\lambda) - 2\bar{n}_2.$$

Откуда следует:

$$\theta = \bar{n}_1 - \bar{n}_2; \quad \zeta(\lambda) = \bar{n}_1 + \bar{n}_2. \quad (7)$$

Таким образом, если значения постоянных $\bar{n}_{1,2}$ принять за номера эпициклоид, то на радиусах $\theta = const$ пересекаются пары эпициклоид, разность номеров которых постоянна, а на окружностях $\lambda = const$ ($\zeta(\lambda) = const$) – эпициклоиды, сумма номеров которых постоянна.

Практически используется система номеров n_1, n_2 , связанных с \bar{n}_1, \bar{n}_2 равенствами:

$$n_1 - n_2 = \frac{180}{\pi}(\bar{n}_1 - \bar{n}_2) - 200, \quad n_1 + n_2 = 1000 - \frac{180}{\pi}(\bar{n}_1 + \bar{n}_2), \quad (8)$$

что дает, учитывая (7),

$$n_1 - n_2 = \theta - 200, \quad n_1 + n_2 = S(\lambda), \quad (9)$$

где θ взято в градусах и $S(\lambda) = 1000 - \frac{180}{\pi}\zeta(\lambda)$ – характеристический индекс (см. табл.4).

Принцип применения метода характеристик к определению поля скоростей двумерного сверхзвукового течения иллюстрируется далее на одной из «типовых» задач теории характеристик.

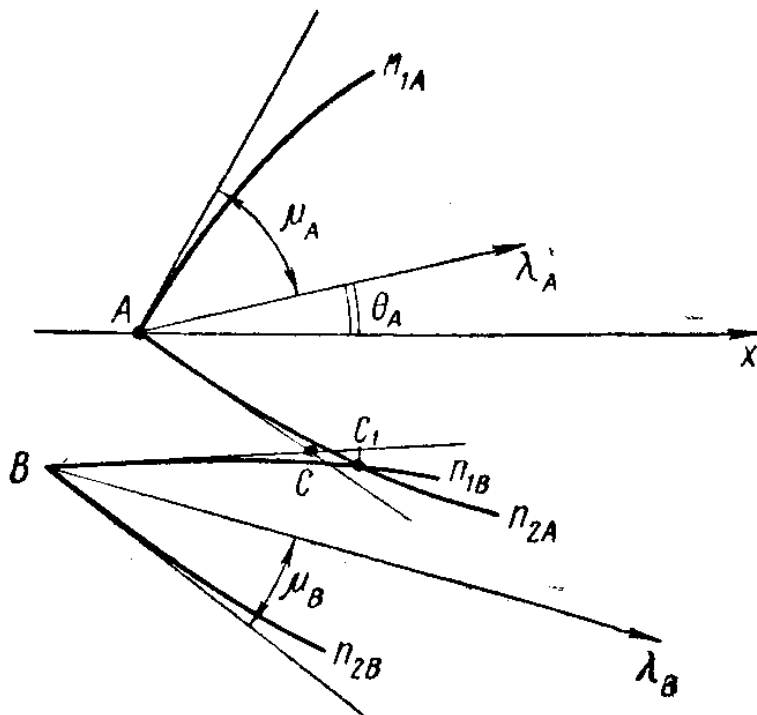


Рис.6

Пусть в близких точках A и B (рис.6), не лежащих на одной характеристике, заданы безразмерные скорости по величине и по направлению:

$\lambda_A, \theta_A; \lambda_B, \theta_B$. Из табл. 4 определяются индексы $S_A = S(\lambda_A)$ и $S_B = S(\lambda_B)$. Применяя равенства (9) к точке A , получим:

$$n_{1A} = \frac{S_A + \theta_A}{2} - 100; \quad n_{2A} = \frac{S_A - \theta_A}{2} + 100.$$

Аналогично находятся номера эпициклоид, соответствующих точке B . (Номера $n_{2A}, n_{2B}, n_{1B}, n_{1A}$ могут быть найдены и графически по диаграмме эпициклоид). Из табл.4 найдем углы Маха в точках A и B : μ_A и μ_B . Пользуясь близостью точек A и B , заменим входящие из них характеристики $\langle \mu, y \rangle$ линиями Маха и найдем точку C пересечения линии Маха первого семейства, выходящей из точки B , с линией Маха второго семейства, выходящей из точки A .

Перемещениям в плоскости $\langle \mu, y \rangle$ вдоль характеристик AB и BC соответствуют перемещения в плоскости годографа вдоль эпициклоид с номерами n_{1B} и n_{2A} . Поэтому равенства (9) применительно к точке C дают:

$S_C = n_{1B} + n_{2A}$; $\theta_C = n_{1B} - n_{2A} + 200$, и, определив из табл.4 λ_C по S_C , находим скорость в точке C и ее направление: λ_C, θ_C . Графически λ_C, θ_C могут быть найдены по диаграмме эпициклоид определением точки пересечения эпициклоид с номерами n_{1B} и n_{2A} .

Ошибка, возникающая в вычислении за счет замены характеристик линиями Маха тем меньше, чем ближе точки A и B .

Особенности применения метода характеристик вблизи контуров обтекаемых тел и вблизи свободных поверхностей струй выясняются в задачах этого параграфа.

В задачах, где происходит расширение потока в пучке бесконечно слабых волн, удобно приближенно заменять непрерывное расширение расширением в дискретных «линейных» волнах конечной интенсивности. Интенсивность каждой такой «линейной» волны определяется углом поворота на ней потока.

Чтобы замена непрерывной волны «линейной» волной давала меньшую ошибку, угол Маха «линейной» волны следует определять по числу Маха, среднему для областей, разделенных волной, и откладывать осредненный таким образом угол Маха от среднего для этих областей направления течения.

Для волны сжатия, в которой отклонение потока невелико, годограф скорости отличается от эпициклоиды лишь малыми третьего порядка. Поэтому слабые волны сжатия можно считать «почти изэнтропическими» и употреблять метод характеристик не только к расчету течений расширения, но и течений, содержащих как волны расширения, так и слабые ударные волны одновременно.

Для решения задач на взаимодействие волн с поверхностями необходимо учитывать, что: а) если давление вдоль свободной поверхности постоянно, волна сжатия отражается от нее волной расширения, а волна расширения – волной сжатия;

б) отражаясь от плоской стенки, волны сжатия и волны расширения, не взаимодействующие с другими волнами, не меняют своего типа;

в) при наличии оси симметрии в течении, она может быть принята в расчете за твердую стенку.

Задачи 1 – 24

1. На какой угол должен повернуться поток воздуха, обтекая тупой внешний угол, для того, чтобы скорость течения возросла от $V_1 = a_{кр}$ до $V_2 = 1,5a_{кр}$?

2. Найти угол δ^* , который займет волна расширения, если при обтекании внешнего тупого угла движение воздуха ускоряется от $M_1 = 1$ до $M_2 = 2,24$. Найти угол отклонения потока в волне.

3. Найти угол поворота воздуха и угол, занятый волной расширения, если при повороте в волне число Маха возрастает от $M_1 = 2$ до $M_2 = 2,5$. Найти положение линии начала отсчетов углов.

Указание: воспользоваться таблицами газодинамических функций.

4. По условию задачи 3 найти соотношение между радиусами-векторами точек одной линии тока в начале и в конце волны расширения.

5. Найти максимальный угол θ_{\max} поворота сверхзвукового потока воздуха в волне расширения, если до расширения число Маха $M_1 = 5$.

6. При истечении в пустоту поток воздуха повернулся в волне расширения на угол $90,5^\circ$. Найти число Маха потока до поворота.

7. Вдоль AB (рис.7) течет поток воздуха со скоростью $V_1 = 500 \frac{м}{сек}$ при температуре $T_1 = 300^\circ K$ и давлении $p_1 = 1 \text{ атм}$. Найти область, занятую волной расширения, скорость, давление и температуру в потоке после поворота его на внешний угол $\theta = 15^\circ$.

секах одинакова: $289^\circ K$. В линейной постановке рассмотреть распад разрыва, движение волны, скорость воздуха.

15. В характеристическом треугольнике ABC , образованном отрезком AB и характеристиками AC и BC (рис.9) указать область определения и область влияния для начальных данных, заданных на отрезке A_1B_1 , считая характеристики прямолинейными.

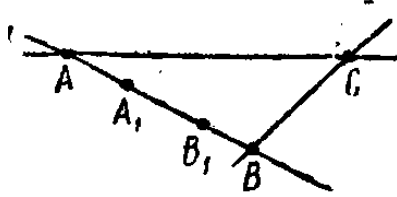


Рис.9

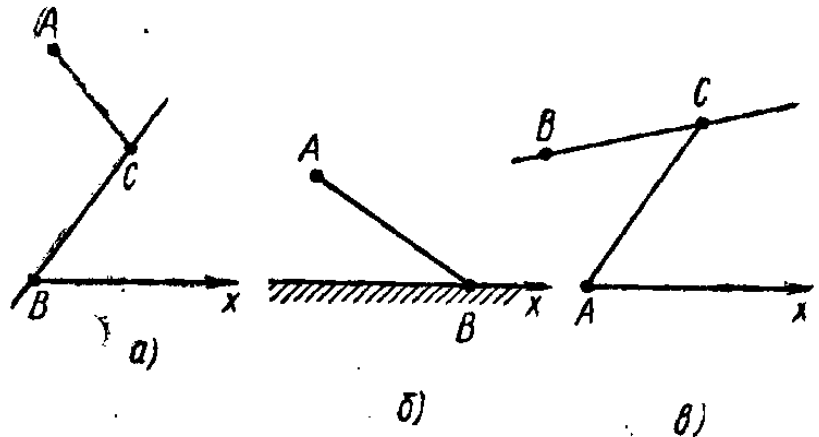


Рис.10

16. На рис. 10 изображены схемы трех элементарных типовых задач теории характеристик:

а) в близких точках A и B заданы скорости потока воздуха: $\lambda_A = 1,7$; $\theta_A = 5^\circ$; $\lambda_B = 1,66$; $\theta_B = 0$. Найти скорость в точке C , где пересекаются характеристики, проходящие через точки A и B .

б) скорость потока воздуха задана в точке A вблизи стенки: $\lambda_A = 1,6$; $\theta_A = 10^\circ$. Найти скорость потока в точке B пересечения стенки с характеристикой, проходящей через точку A .

в) скорость потока воздуха задана в точке A вблизи свободной границы струи: $\lambda_A = 1,8$; $\theta_A = 0$. На свободной границе струи скорость задана по модулю $\lambda_B = 1,9$. Определить направление свободной поверхности струи в точке пересечения ее с характеристикой, проходящей через точку A .

17. Воздух течет по плоскому каналу, изображенному на рис.11. В сечении BC давление $p_1 = 1,28 \text{ ата}$, безразмерная скорость $\lambda_1 = 1,3$. Во внешней среде (вдоль AB) давление $p_a = 1,0 \text{ ата}$. Верхняя стенка расширяет течение в точке C на угол $\theta_c = 2^\circ$. С помощью характеристических чисел рассмотреть поля скоростей и давлений за отрезком BC . Определить характер отражения волн BD и CF .

21. Проанализировать с помощью характеристик нерасчетное истечение воздуха из плоского сопла при повышенном противодавлении, линеаризуя волны сжатия и расширения в пределах одного цикла струи 1 (отражение волны сжатия от свободной поверхности). Число Маха на выходе $M_1 = 1,77$. Перепад давлений $\frac{p_1}{p_a} = 0,77$.

22. Определить с помощью характеристик границы волны расширения и ее отражение от стенки, поле чисел Маха и форму линий тока при течении воздуха по каналу, форма которого показана на рис. 26. Число Маха на входе в канал $M_1 = 1,5$.

Указание: представить волну расширения в виде трех дискретных волн равной интенсивности.

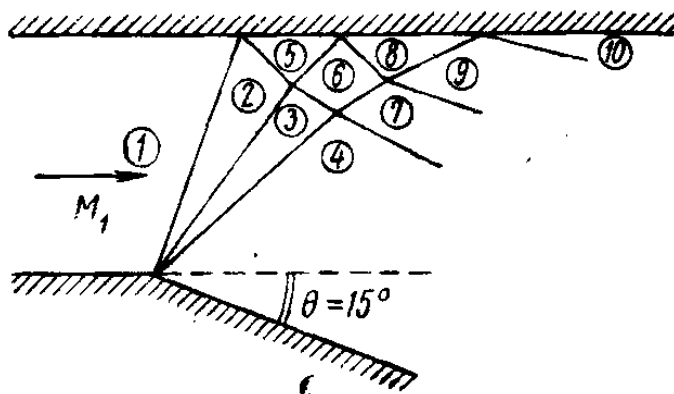


Рис.14

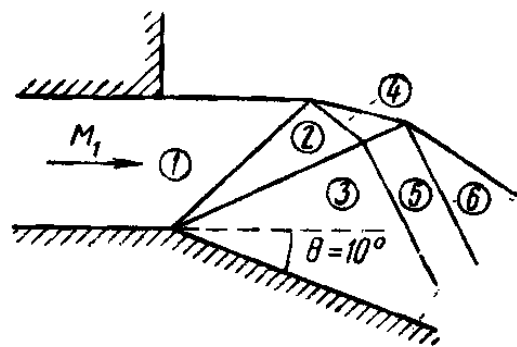


Рис.15

23. Проанализировать с помощью характеристик отражение от свободной поверхности струи волны расширения, вызванной отклонением стенки AB на угол $\theta = 10^\circ$ (рис.15). Число Маха струи до расширения $M_1 = 1,5$. Давление в струе на срезе сопла – атмосферное.

Указание: представить волну расширения в виде двух дискретных волн равной интенсивности.

24. Провести методом характеристик расчет сверхзвуковой части плоского сопла на $M = 1,5$, заменяя стенку после критического сечения ломаной из трех отрезков. Каждый отрезок осуществляет поворот потока на 2° .

Указание: 1. Длину первых двух отрезков взять $0,4a$ (a – ширина половины критического сечения). Длина третьего отрезка определяется точкой падения на него первой волны от противоположной стенки. 3. Звуковая линия – прямая.